Сверхпроводящее спаривание при отталкивании: метод потенциала нулевого радиуса

Ю. Н. Тогушова
Государственный педагогический университет, Воронеж, 394043, Россия

Спаривание отталкивающихся частиц с большим суммарным импульсом приводит к зависящему от импульса относительного движения сверхпроводящему параметру порядка с пересекающей контур Ферми линией нулей внутри кинематически разрешенной области. Для средних по областям знакопостоянства значений параметра порядка уравнение самосогласования сведено к системе двух интегральных уравнений, решение которой в пределе слабой связи получено в приближении потенциала нулевого радиуса с кусочно-постоянным ядром с двумя собственными значениями разных знаков.

1. Сверхпроводящий (SC) параметр порядка, возникающий в результате спаривания с большим суммарным импульсом при отталкивательном взаимодействии носителей заряда является знакопеременной функцией внутри области кинематического ограничения импульса относительного движения пары и имеет линию нулей, пересекающую парный контур Ферми (PFC) в двух точках.[1] Симметрия параметра порядка, в силу вырождения по кристаллографически эквивалентным суммарным импульсам, определяется взаимодействием, смешивающим состояния в эквивалентных кинематически разрешенных областях.

Линия нулей разбивает кинематически разрешенную (для импульса относительного движения $\boldsymbol{k}$) область Ξ, зависящую от формы контура Ферми (FC) и суммарного импульса пары $\boldsymbol{K}$, на две подобласти, Ξ_+1 и Ξ_-, каждая из которых содержит участок PFC. Введение средних по этим областям значений параметра порядка позволяет свести[1] нелинейное интегральное уравнение самосогласования к системе интегральных уравнений относительно двух неизвестных величин $\Delta_\pm$, определяющих кусочно-постоянную функцию, аппроксимирующую зависящий от $\boldsymbol{k}$ SC параметр порядка. Для описания взаимодействия, соответствующего рассеянию частиц внутри областей Ξ_+ и Ξ_- и между этими областями, вводятся три феноменологические константы, соотношения между которыми качественно могут быть оценены площадями импульсного пространства, доступными для рассеяния[2].

2. В случае спаривания с большим суммарным импульсом эти константы могут быть выражены через параметры потенциала взаимодействия в рамках предлагаемого в настоящей работе подхода, являющегося развитием известного метода потенциала нулевого радиуса[3]. Малость кинематически разрешенной области Ξ позволяет матричный элемент взаимодействия $U(\boldsymbol{\kappa})$ записать в виде квадратичной функции

$$U_d(\boldsymbol{\kappa}) = U_0 r_0^2[1 - \kappa^2 r_0^2/2] \ , \qquad (1)$$

где импульс, передаваемый при рассеянии $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'$. Выражение (1) представляет первые члены разложения энергии взаимодействия в степенной ряд в пределах Ξ. Здесь r_0 – характерный радиус взаимодействия, а $U_0 r_0^2 \equiv w_0$ имеет смысл эффективной константы связи. Предельный переход $r_0 \to 0$ при $w_0 = \mathrm{const}$, характерный для метода потенциала нулевого радиуса, дает возможность вырожденное ядро (1) интегрального оператора взаимодействия свести к кусочно-постоянному в пределах области Ξ ядру, параметры которого, пропорциональные w_0 и соответствующие рассеянию как внутри подобластей Ξ_+ и Ξ_-, так и между ними, найдены в настоящей работе. В пределе слабой связи также получено и исследовано решение системы интегральных уравнений, соответствующих SC спариванию с большим суммарным импульсом при отталкивательном взаимодействии, которое описывается введенным здесь кусочно-постоянным ядром.

3. Задача о двух притягивающихся частицах, возбужденных над FS, в случае спаривания с ненулевым импульсом при кулоновском отталкивании частиц[1,4] приводит к связанному состоянию, энергия которого в пределе слабой связи ($w_0 g << 1$, где g – плотность состояний на PFC) имеет вид[4]

$$E_0 = \xi_0 \cdot \exp\left(-\frac{2}{w_0 g}\right) . \qquad (2)$$

Здесь ξ_0 – энергетический масштаб области Ξ. Волновая функция относительного движения пары определяется уравнением[4]

$$\psi(\boldsymbol{k}) = G(\boldsymbol{k}; E) \int_\Xi U(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')\psi(\boldsymbol{k}') d^2k' \ , \qquad (3)$$

имеющим решение[4] при данной энергии $E = -E_0$. Здесь $G(\boldsymbol{k}, E)$ – запаздывающая функция Грина свободного относительного движения пары, интегрирование производится по области Ξ.

Одним из условий возникновения связанного состояния с энергией связи $E = -E_0 \neq 0$ является существование хотя бы одного отрицательного собственного значения фурье-образа энергии взаимодействия[1]. Это условие выполняется для вырожденного ядра (1), имеющего четыре собственные функции, две четные и две нечетные относительно преобразования $\boldsymbol{k} \leftrightarrow -\boldsymbol{k}$. К связанному состоянию приводят лишь четные функции, одной из которых и соответствует отрицательное собственное значение. Эта функция, имеющая линию нулей в области определения импульса относительного движения пары, в пределе $r_0 \to 0$ при

$w_0 = \mathrm{const}$ переходит в кусочно-постоянную функцию

$$\varphi_1(\boldsymbol{k}) = \pm\frac{1}{\sqrt{\Xi}} \cdot \sqrt{\frac{\Xi_\mp}{\Xi_\pm}} \;, \qquad \boldsymbol{k} \in \Xi_\pm \;, \tag{4}$$

определяемую ее средними значениями в областях знакопостоянства. Вторая собственная функция, соответствующая положительному собственному значению, в пределе $r_0 \to 0$ при $w_0 = \mathrm{const}$ переходит в

$$\varphi_2(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{\Xi}} \;. \tag{5}$$

Обе функции, $\varphi_1(\boldsymbol{k})$ и $\varphi_2(\boldsymbol{k})$, нормированы на единицу и ортогональны друг другу.

4. Определенное в результате рассматриваемого предельного перехода положительное собственное значение имеет вид $\lambda_2 = 1/w_0\Xi$, тогда как другое, λ_1, оставаясь, как и прежде, отрицательной величиной, устремляется к бесконечности, $\lambda_1 \to -\infty$, приводя к отсутствию связанного состояния. Таким образом, сделанное ранее предположение о том, что связанное состояние с энергией $-E_0 \neq 0$, все же существует, требует выполнения дополнительного условия, налагаемого на отрицательное собственное значение в пределе $r_0 \to 0$, а именно, это собственное значение должно быть конечной величиной, соответствующей заданной энергии $-E_0$. Если представить вырожденное ядро (1) в виде спектрального разложения Гильберта-Шмидта по системе его собственных функций (4) и (5),

$$U(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}) = \sum_{s=1}^{2} \frac{\varphi_s(\boldsymbol{k})\varphi_s^*(\boldsymbol{k'})}{\lambda_s} \;, \tag{6}$$

и разложить волновую функцию относительного движения пары по этой системе функций, то интегральное уравнение (3) сводится к конечной системе линейных однородных уравнений, условие нетривиальной совместности которой определяется как

$$\det \{\lambda_s \delta_{ss'} - G_{ss'}(E)\} = 0 \;, \tag{7}$$

где запаздывающая функция Грина записана в представлении, образованном функциями $\varphi_s(\boldsymbol{k})$.

Уравнение (7), имеющее в данном случае одну неизвестную λ_1, дает в результате конечное значение отрицательного собственного значения, соответствующего энергии связи E_0.

С помощью найденных таким образом собственных значений и собственных функций, уже не содержащих r_0, может быть построено новое ядро, приближенно описывающее взаимодействие между частицами. Используя для подобного построения разложение Гильберта-Шмидта (6), получаем симметричное вырожденное кусочно-постоянное ядро, характеризуемое тремя параметрами, являющимися постоянными значениями этого ядра, когда импульсы $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k'}$ принадлежат одной и той же области Ξ_+ или Ξ_- (U_{++} и U_{--}, соответственно) или разным областям (U_{+-}).

В пределе слабой связи $w_0 g << 1$ (при малых значениях энергии связи E_0) наличие PFC приводит к логарифмической особенности в компонентах функции Грина $G_{ss'}(E)$, в результате чего входящие в них интегралы могут быть представлены в виде суммы сингулярной и регулярной частей, последней из которых при условии $w_0 g << 1$ можно пренебречь. Учитывая тот факт, что PFC пересекает границу, разделяющую Ξ_+ и Ξ_-, и, следовательно, принадлежит как Ξ_+ (с относительной долей β), так и Ξ_- (с относительной долей $1-\beta$), элементы, определяющие ядро оператора взаимодействия, можно записать в виде

$$\begin{aligned} U_{++} &= w_0[1-(1-\alpha)^2/D] \;, \quad U_{--} = w_0[1-\alpha^2/D] \;, \\ U_{+-} &= w_0[1+\alpha(1-\alpha)/D] \;, \end{aligned} \tag{8}$$

где $2D \equiv [(\alpha-\beta)^2 + 2\beta(1-\beta)]$, $\alpha = \Xi_+/\Xi$.

Уравнение самосогласования переписывается в виде системы интегральных уравнений, определяющих средние значения параметра порядка внутри соответствующих областей Ξ_+ и Ξ_-:

$$\left\{ \begin{array}{l} (w_0\psi_+ - c_+)\Delta_+ + \Delta_- = 0 \;, \\ \Delta_+ + (w_0\psi_- - c_-)\Delta_- = 0 \;, \end{array} \right. \tag{9}$$

где обозначено $c_+ = U_{--}/U_{+-}$, $c_- = U_{++}/U_{+-}$, а функции $\psi_\pm$, определенные как $\psi_\pm = w_0 f_\pm / 2DU_{+-}$ не зависят от константы связи w_0. Интегралы $f_\pm$ имеют логарифмические особенности при малых $\Delta_\pm$, обусловленные участками PFC в областях знакопостоянства параметра порядка $\Delta(\boldsymbol{k})$.

При отталкивательном взаимодействии система уравнений (9) имеет нетривиальное решение, которому соответствуют вещественные $\Delta_\pm$ противоположных знаков.

1. В. И. Белявский, Ю. В. Копаев, В. М. Софронов, С. В. Шевцов, *ЖЭТФ* **124**, 1149 (2003).
2. V. I. Belyavsky, Yu. V. Kopaev, *Phys. Rev.* B **67**, 024513 (2003); *Phys. Lett.* A **322**, 244 (2004).
3. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов. *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике.* “Наука”, М., 1971.
4. В. И. Белявский, Ю. В. Копаев, Ю. Н. Тогушова, С. В. Шевцов, *ЖЭТФ* **126**, 672 (2004).